ランダム生成した量子通信路・量子状態について

山形大学　福田 素久

2020 年 10 月 29 日

目 次

1　ランダムに量子状態や量子通信路を生成する

1.1 量子状態

量子状態は半正定値エルミート行列（$n \times n$）でトレースが 1 のものとする。例えば量子状態を $\rho \in M_n(\mathbb{C})$ と書くと、

- （量子）状態は離散確率分布を与える。

$$\rho \sim \mathrm{diag}(p_1, \ldots, p_n)$$

- 状態は Entropy を与える。

$$S(\rho) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

  - ランクが 1 の場合は特に純粋（量子）状態と呼ばれ、エントロピーは 0 になる。
  - $\rho = I/n$ のときはエントロピーは $\log n$ になる。

ランダムな量子状態は例えば以下のように定義できる。一様に分布している $|x\rangle \in S_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n}$ に対して、

$$\rho = \operatorname*{Tr}_{\mathbb{C}^m}[|x\rangle\langle x|]$$

ここで $S_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n}$ は $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ の単位球である。実際、Schmidt の分解を行うと、

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sqrt{p_i}\, |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$$

と正規直交系 $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m$ と $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^n$ を使って書くことができ、

$$\rho = \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j}\ \mathrm{Tr}[|e_i\rangle\langle e_i|] \otimes |f_i\rangle\langle f_j| = \sum_i p_i |f_i\rangle\langle f_i|$$

とできる。これは、正規化した Wishart 行列である。

$$\frac{GG^*}{\mathrm{Tr}[GG^*]}$$

ここで、$|g\rangle \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ に対して、以下の関係に注意する。

$$|g\rangle = \sum_{i,j} g_{i,j} |i\rangle \otimes |j\rangle \quad \longleftrightarrow \quad G = \sum_{i,j} g_{i,j} |i\rangle \otimes \langle j|, \qquad \langle g|g\rangle = \mathrm{Tr}[GG^*]$$

1.2　量子通信路

（量子）通信路 $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ に必要な条件は?

- 正写像であること。
- トレースを保存すること。
- さらに、完全正写像であることが求められる。

初めの 2 つは状態を状態に写すことから必要。完全正写像性は他の量子システムを考えると理解できる。つまり $\sigma \in M_{nm}(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C})$ という状態を考えると、

$$\Phi \otimes \mathrm{id}_m(\sigma)$$

も半正定値にならなければならない。つまり、「$\Phi \otimes \mathrm{id}_m$ が任意の m に対して正写像になる」という完全正写像性が導き出される。

ここで、正写像であるが完全正写像でない例として transpose が挙げられる。

Stinespring の方法

トレースを保存する完全正写像は Stinespring の枠組みで考えると、

$$\Phi(\rho) = \operatorname*{Tr}_{\mathbb{C}^k}[V\rho V^*]$$

と書ける。ここで $V : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^n$ は等長写像で、$\mathbb{C}^k$ は Environment とする。

ここで Haar 測度に従って $U \in \mathcal{U}(kn)$ を選び、V を最初の n 列を取ってきたものとして定義すると、$\mathcal{U}(kn)$ から導かれた測度によってランダムな通信路を定義することができる。

この考えをもう少し推し進めると、通信路は以下のように見ることもできる。

$$\operatorname*{Tr}_{\mathbb{C}^k} : L(E) \to M_n(\mathbb{C})$$

ここで、$E = \mathrm{Image}(V) \leq \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^n$ は n 次元部分空間で、 $L(E)$ はその空間に作用する行列空間。つまり、(ランダム) 通信路とは（ランダム）部分空間である。

2　ランダムに生成された量子通信路と非加法性

2.1 Minimum Output Entropy

- Minimum Output Entropy の定義：
  通信路 Φ に対して、Minimum Output Entropy は

$$S_{\min}(\Phi) = \min_{\rho} S(\Phi(\rho))$$

  で定義される。ここで、ρ は状態。

- 加法性/非加法正の問題の定式化：2 つの通信路 Φ, Ω に対して、

$$S_{\min}(\Phi \otimes \Omega) \stackrel{?}{=} S_{\min}(\Phi) + S_{\min}(\Omega)$$

$$S_{\min}(\Phi \otimes \Omega) \stackrel{?}{<} S_{\min}(\Phi) + S_{\min}(\Omega)$$

  2008 年に Hastings が非加法性を示す通信路が存在することを示すまでは一般的に加法性が成立すると信じられていた。

- 数学的な問題意識：
  任意の状態 ρ, σ に対して、

$$S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$$

  となるため、以下は常に成立する。

$$S_{\min}(\Phi \otimes \Omega) \leq \min_{\rho \otimes \sigma} S(\Phi \otimes \Omega(\rho \otimes \sigma)) = S_{\min}(\Phi) + S_{\min}(\Omega)$$

  エンタングルメントは $S_{\min}$ を改善するのだろうか？

- 情報理論的な問題意識：
  - 「Entropy = 負の情報」と考えると、Entropy が小さい Output があるとよい。（本当はもっと複雑だが。。。）
  - N 回通信が行われ、各通信のノイズが独立だとすると、複数回の通信全体は $\Phi^{\otimes N}$ と表現できる。このとき、

$$S_{\min}(\Phi^{\otimes N}) \stackrel{?}{=} N \cdot S_{\min}(\Phi)$$

    が問題になる。上記の加法性の問題はこの一般的に書いたものである。

- Shor が 2003 年に Minimum Output Entropy の問題と通信量の問題が同値であることを示す。[1] これにより、通信量の問題が行列の固有値の問題に帰着される。

- 証明された事実：
  $1 << k << n$ のとき、上に定義したランダムな通信路を考えると、高い確率で Minimum Output Entropy の非加法性を示す。[2]

- 数学的展開：
  - 数学的証明：
    F, King, Moser[3] ; Brandao, Horodecki.
  - Asymptotic Geometric Analysis：
    Aubrun, Szarek, Werner; F.
  - 自由確率：
    Belinschi, Collins, Nechita.

---

[1] P. Shor, Comm. Math. Phys., 246(3):453472, (2004)
[2] M.B.Hastings, Nat. Phys. vol. 5, p 255–257(2009)
[3] M.F., C. King, D. Moser, Comm. Math. Phys., 296, 1, 111-143 (2010)

2.2 Asymptotic Geometric Analysis によるアプローチ

以下で、Aubrun, Szarek, Werner が通信路の非加法性を証明した[4] アイデアを理解する。そのために同著者が示した通信路の非乗法性[5] について解説する。

通信路の非乗法性とは $p > 1$ に対して

$$\|\Phi \otimes \Omega\|_{1\to p} > \|\Phi\|_{1\to p} \cdot \|\Omega\|_{1\to p}$$

となることである。定義にある $\|\cdot\|_{1\to p}$ は Maximum Output p-Norm と呼ばれ

$$\|\Phi\|_{1\to p} = \max_{\rho} \|\Phi(\rho)\|_p$$

のように Output の最大 Schatten Norm で定義される。ここで、ρ は状態である。

非乗法性と非加法性の関係は、Renyi Entropy の定義よりわかる：

$$\frac{1}{1-p} \log \mathrm{Tr}[\sigma^p] = \frac{p}{1-p} \log \|\sigma\|_p$$

Renyi Entropy は $p \to 1$ で Entropy に収束する。

---

[4] G. Aubrun, S. Szarek, and E. Werner, Comm. Math. Phys., 305(1):8597, (2011)
[5] G. Aubrun, S. Szarek, and E. Werner, J. Math. Phys., 51(2):022102, (2010)

Aubrun, Szarek, Werner の方法

以下のランダムな等長写像を使って通信路 Φ を定義する:

$$V : \mathbb{C}^{d^{1+1/p}} \to \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$$

これに対し、その複素共役 $\bar{\Phi}$ を $\bar{V}$ で定義すれば、高い確率で

$$\|\bar{\Phi}\|_{1\to p} = \|\Phi\|_{1\to p} \sim d^{-1+1/p} \leq \|\Phi \otimes \bar{\Phi}\|_{1\to p} \tag{1}$$

となる。もちろん $p > 1$ に対して d を大きくとれば

$$\|\bar{\Phi}\|_{1\to p} \cdot \|\Phi\|_{1\to p} < \|\Phi \otimes \bar{\Phi}\|_{1\to p}$$

ここで評価 (1) において、

- 漸近的振る舞いは Dvoretzky の定理で証明できる。
- 不等式を示すには以下の性質を使う。

$$U \otimes \bar{U}|b\rangle = |b\rangle$$

Dvoretzky の定理を使う

- 細かい条件は書かずに Dvoretzky の定理を述べると、実ノルム空間 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ に対して、典型的なランダム部分空間 E に対し以下が成立する。

$$(1-\epsilon)\, M\, \|x\|_2 \leq \|x\| \leq (1+\epsilon)\, M\, \|x\|_2 \qquad \forall x \in E$$

  M は S^{n-1} 上で一様にランダムな x に対しての $\|x\|$ の Median とする。

- テンソル積空間の単位ベクトルベクトル $|x\rangle \in S_{\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d}$ に対し、

$$\left\| \operatorname*{Tr}_{\mathbb{C}^d}[|x\rangle\langle x|] \right\|_p = \|XX^*\|_p = \|X\|_{2p}^2$$

  に注意して、以下のノルムに対して Dvoretzky の定理を適用する。

$$S^{2d^2-1} = S_{\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d} \ni |x\rangle \longmapsto \|X\|_{2p} \in \mathbb{R}$$

- 通信路はテンソル積空間の部分空間なので、ある通信路 Φ が存在して、

$$\|\Phi(|x\rangle\langle x|)\|_p \sim d^{-1+\frac{1}{p}} \qquad \forall |x\rangle \in S_{\mathbb{C}^{d^{1+1/p}}}$$

複素共役な通信路とのテンソル積

任意に選んだ通信路とその複素共役にたいして Input を Bell 状態とすると Output は大きな固有値を持つ。Bell 状態とはテンソル積空間上の以下のベクトルへの射影として定義される。

$$|b_l\rangle = \sum_{i=1}^{l} |i\rangle \otimes |i\rangle$$

Input 空間を $\mathbb{C}^l$、 Output 空間を $\mathbb{C}^n$、また、Environment 空間を $\mathbb{C}^k$ とすると、

$$\langle b_n| \left[\Phi \otimes \bar{\Phi}(|b_l\rangle\langle b_l|)\right] |b_n\rangle \geq \frac{l}{kn} = d^{1+\frac{1}{p}} \cdot d^{-2} = d^{-1+\frac{1}{p}}$$

がいえる。よって

$$\|\Phi \otimes \bar{\Phi}\|_{1\to p} \geq d^{-1+\frac{1}{p}} \gg d^{-2+\frac{2}{p}} \sim \|\Phi\|_{1\to p}\|\bar{\Phi}\|_{1\to p}$$

となる。

以上の性質はランダムに生成した量子通信路の典型的な振る舞いとなる。

Bell Input と大きい固有値を持つ Output の計算

$$
\begin{aligned}
&\langle b_n| \left[\Phi \otimes \bar{\Phi}(|b_l\rangle\langle b_l|)\right] |b_n\rangle \\
&= \langle b_n| \left[\sum_{i,j=1}^{k} (\langle i,j| \otimes I_{n^2}) V \otimes \bar{V} |b_l\rangle\langle b_l| V^* \otimes V^T (|i,j\rangle \otimes I_{n^2})\right] |b_n\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} (\langle i,j| \otimes \langle b_n|) V \otimes \bar{V} |b_l\rangle\langle b_l| V^* \otimes V^T (|i,j\rangle \otimes |b_n\rangle) \\
&= \langle b_l| V^* \otimes V^T \left(\sum_{i,j=1}^{k} |i,j\rangle\langle i,j| \otimes |b_n\rangle\langle b_n|\right) V \otimes \bar{V} |b_l\rangle \\
&\geq \langle b_l| V^* \otimes V^T \left(|b_k\rangle\langle b_k| \otimes |b_n\rangle\langle b_n|\right) V \otimes \bar{V} |b_l\rangle \\
&= \left|\langle b_l| V^* \otimes V^T \left(|b_k\rangle \otimes |b_n\rangle\right)\right|^2 = \left|\langle b_l| \frac{1}{\sqrt{kn}} \left[\sum_{i=1}^{l} |i\rangle \otimes |i\rangle\right]\right|^2 \geq \frac{l}{kn}
\end{aligned}
$$

ここで、 $$V^* \otimes V^T \left(\sum_{i=1}^{kn} |i\rangle \otimes |i\rangle\right) = V^* V \otimes I_l \left(\sum_{i=1}^{l} |i\rangle \otimes |i\rangle\right)$$

2.3 自由確率論を使ったアプローチ

ランダム行列の極限を考えて、代数確率空間で話を進めることについて。

- 正確な計算が可能な場合がある。
- 極限操作：ランダム行列の多項式の ∞-ノルム収束
  - GUE（U. Haagerup, S. Thorbjørnsen, 2005）
  - GUE と他の独立なランダム行列（C. Male, 2011）
  - Haar Uniary と他の独立なランダム行列（B. Collins, C. Male, 2014）
- 非加法性の証明
  - S. Belinschi, B. Collins, I. Nechita (2016)：正確な計算
  - B. Collins, M. F., P. Zhong (2015)：不等式による
  - B. Collins (2018)：Haagerup の不等式
  - M.F., T. Hasebe, S. Sato (soon)

2.4 正確な計算の例

通信路が以下のように定義されているとする。

$$\Psi(\rho) = \frac{1}{k}\sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{Tr}\left[U_i \rho U_j^*\right] |i\rangle\langle j| \qquad \left(\Omega(\rho) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i \rho U_i^* \quad \text{と同等}\right)$$

ここで Ω は random unitary channel や external field と呼ばれる。このとき、$|x\rangle \in S_{\mathbb{C}^n}$, $|a\rangle \in S_{\mathbb{C}^k}$ として、$\|\Psi\|_{1\to\infty}$ の計算を行うと、

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|_{1\to\infty} &= \max_x \max_a \mathrm{Tr}\left[\Psi(|x\rangle\langle x|)|a\rangle\langle a|\right] = \max_a \max_x \langle x| \sum_{i,j=1}^{k} \bar{a}_i a_j U_j^* U_i |x\rangle \\
&= \max_a \left\| \sum_{i=1}^{k} \bar{a}_i U_i \right\|_\infty^2 \longrightarrow \max_a \left\| \sum_{i=1}^{k} \bar{a}_i u_i \right\|^2
\end{aligned}$$

この収束は一様であり、最後の値は計算されている。[6] よって、$\|\Omega\|_{1\to\infty} = \|\Psi\|_{1\to\infty}$ より、極限での Ω の Maximum Output ∞-Norm が計算できる。

[6] C. Akemann, P. Ostrand, Amer. J. Math., 98.4, 10151047, (1976)

3　ランダムな量子状態

3.1 メアンダー多項式との関連

以下のようにランダム行列を構成する。

1. 単位球上で一様に分布しているランダムベクトルを考える。

$$|x\rangle = \sum_{i,j,k} x_{i,j,k} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle \in S_{\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n}$$

2. 次に $\mathbb{C}^r$ 上で $|x\rangle\langle x|$ の partial trace をとる。

$$XX^* = \in M_{mn}(\mathbb{C}), \qquad (XX^*)_{(j,j'),(k,k')} = \sum_i x_{i,j,k}\, \bar{x}_{i,j',k'}$$

3. 最後に 2 つの $\mathbb{C}^n$ のうち 1 つで transpose をとる。partial transpose と呼ばれる。

$$[XX^*]^\Gamma \in M_{mn}(\mathbb{C}), \qquad \left([XX^*]^\Gamma\right)_{(j,j'),(k,k')} = \sum_i x_{i,j',k}\, \bar{x}_{i,j,k'}$$

Peres 条件：エンタングルメントしていない状態は partial transpose しても半正定値性が保たれる。

$$\sum_i p_i \rho_i \otimes \sigma_i \quad \mapsto \quad \sum_i p_i \rho_i^T \otimes \sigma_i$$

3 つの場合分け：

- shifted semi-circular distribution [7]
- free difference of free Poisson distributions [8]
- $[XX^*]^\Gamma$ の $2n$ 次 Moment を計算すると、Meander 多項式を生成。[9]

$$\sum_{k=1}^{n} r^k M_n^{(k)}$$

$M_n^{(k)}$ は 「無限に長い川に橋が $2n$ 個架かっていて、どの橋も一度だけ渡り、k 個のループができるような歩く道のパターン数」。[10]

この考えを進めて、Meander 多項式を自由確率論の組み合わせ論的手法を使って研究している。[11]

---

[7] G. Aubrun, Rand. Matr.: Theo. Appl. Vol. 01, 1250001 (2012)
[8] T. Banica, I. Nechita, J. Theoret. Probab. 26, 855-869 (2013)
[9] F, P. Sniady, J. Math. Phys., 54, 042202 (2013)
[10] P.Di Francesco, O.Golinelli, E.Guitter, Math. Comp.Mode. Vol. 26, 97-147(1997)
[11] M. F., I. Nechita, Annales de l'Institut Henri Poincar D, 6, 4, 607-640 (2019)

3.2　ランダムな量子ガウス状態

まず、直交シンプレクティック群 $\mathsf{K}(2n)$ をユニタリ群 $\mathsf{U}(n)$ により定義する。

$$\mathsf{U}(n) \to \mathsf{K}(2n) = \mathsf{Sp}(2n) \cap \mathsf{O}(2n)$$

$$U \mapsto \begin{pmatrix} \mathsf{Re}(U) & \mathsf{Im}(U) \\ -\mathsf{Im}(U) & \mathsf{Re}(U) \end{pmatrix}$$

ここで、$\mathsf{Sp}(2n) = \{S \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \mid SJS^T = J\}$、$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ とする。

次に、Passive Gaussian unitary evolution を使ってランダムな量子ガウス状態（n-mode）を以下のように共分散行列を使い定義する。

$$S \begin{pmatrix} Z_n & 0 \\ 0 & Z_n^{-1} \end{pmatrix} S^T$$

ここで、$Z_n = \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n)$ （$z_j \geq 1$）とする。

平均エネルギーは、

$$\lambda = \mathrm{Tr}\left[Z_n + Z_n^{-1}\right]/(2n)$$

となる。

このとき、k-mode の部分系の共分散行列を $M \in M_{2k\times 2k}(\mathbb{R})$ とすると、シンプレクティック固有値 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ は、

$$\mathsf{spec}(JM) = \bigcup_{j=1}^{n} \{\pm i\lambda_j\} \ .$$

によって計算でき、$k \ll n$ に対して、以下の測度集中の結果が導かれる。[12]

$$\Pr\left\{\sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j^2 - \lambda^2\right)^2 > \epsilon\right\} < \exp\left(-c\epsilon n\right)$$

直接シンプレクティック固有値の評価をしているので、例えば、これを使ってエントロピーの測度集中も導くことができ、大きな系のランダムなガウス（純粋）量子状態の小さな部分系での典型的なエントロピーの評価になっている。

この結果を得るには $\mathbb{E}[\sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j^2 - \lambda^2\right)^2]$ を計算する必要があったが、これは Weingarten calculus で 4 次モーメントの計算になる。つまり、$|\mathcal{S}_4|^2 = 576$ 通りの計算が必要になる。

[12] M. F., R. Koenig, J. Math. Phys., 60, 112203 (2019)

3.3 ユニタリ群上の平均

Weingarten 関数

$$\mathrm{Wg}_n((1)) = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{Wg}_n((1,1)) = \frac{1}{n^2-1}, \quad \mathrm{Wg}_n((2)) = \frac{-1}{n(n^2-1)} \ .$$

平均の計算

$$\mathbb{E}[UAU^*] = \frac{\mathrm{Tr}[A]}{n} I_n, \quad \mathbb{E}[UAU^*] = \frac{1}{n} A^T.$$

論文で計算した例：A, B, Π は対称行列だと仮定して、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[UAU^T \Pi \bar{U} AU^*\right] &= \frac{1}{n^2-1}\left[(\mathrm{Tr}\, A^2)\Pi + (\mathrm{Tr}\, A^2)(\mathrm{Tr}\, \Pi) I\right] \\ &\quad - \frac{1}{n(n^2-1)}\left[(\mathrm{Tr}\, A^2)(\mathrm{Tr}\, \Pi) I + (\mathrm{Tr}\, A^2)\Pi\right] \ .\end{aligned}$$

Weingarten calculus 自体は行列の要素に対して定義されているものの、計算結果は行列演算で書かれる。

→ Random Tensor Network Integrator (RTNI) の作成[13]

[13] M. F., R. Koenig, I.Nechita, J. Phys. A: Math. Theor. 52 425303 (2019)

3.4 ユニタリ群上の平均を計算するプログラム

他のプログラム：

- `IntU`, a Mathematica package, [Puchała and Miszczak (2017)].
- `IntHaar`, a Maple package, [Ginory and Kim (2016)].
  (includes Haar orthogonal and symplectic cases.)

RTNI：

`RTNI` (Random Tensor Network Integrator),
Mathematica and Python packages.

- RTNI は行列をそのまま扱う。
- ヤング・ダイアグラムを使った、Weingarten functions を生成するプログラムも付属。

行列計算と Weingarten functions の対応を計算して漸近的な特性を抽出。

$\frac{2k\left(-5k^3+10nk^2-\left(6n^2+1\right)k+n^3+n\right)}{n\left(n^6-14n^4+49n^2-36\right)}$	$\mathrm{Tr}[B]^4$
$-\frac{8k\left(\left(n^2+1\right)k^3-n\left(n^2+11\right)k^2+11\left(n^2+1\right)k-n\left(n^2+11\right)\right)}{n\left(n^6-14n^4+49n^2-36\right)}$	$\mathrm{Tr}[B]\mathrm{Tr}[B^3]$
$\frac{4k\left(5nk^3-2\left(4n^2+9\right)k^2+n\left(3n^2+28\right)k-10n^2\right)}{n\left(n^6-14n^4+49n^2-36\right)}$	$\mathrm{Tr}[B]^2\mathrm{Tr}[B^2]$
$\frac{2k\left(\left(n^3+n\right)k^3-20n^2k^2+5n\left(n^2+13\right)k-4\left(4n^2+9\right)\right)}{n\left(n^6-14n^4+49n^2-36\right)}$	$\mathrm{Tr}[B^4]$
$\frac{2k\left(\left(3-2n^2\right)k^3+2n\left(n^2+6\right)k^2-\left(16n^2+21\right)k+n\left(n^2+21\right)\right)}{n\left(n^6-14n^4+49n^2-36\right)}$	$\mathrm{Tr}[B^2]^2$
$-\frac{4k\left((3n+4)k^3-2n(2n+1)k^2+\left(n^3-3n^2-n-4\right)k+n\left(n^2+n+4\right)\right)}{(n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$	$\mathrm{Tr}[B]^2\mathrm{Tr}[A^2]$
$-\frac{4k(k+1)\left((n+1)k^2-\left(n^2+1\right)k-(n-1)n\right)}{(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$	$\mathrm{Tr}[A^2]^2$
$\frac{2k(k+1)\left(\left(n^2+n+2\right)k^2+\left(3n^2-5n-2\right)k+4(n-1)n\right)}{(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$	$\mathrm{Tr}[A^4]$
$\frac{4k(k+1)\left(\left(n^2+5n+4\right)k^2-\left(n^2+n+4\right)k-2n(n+1)\right)}{(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$	$\mathrm{Tr}[(AB)^2]$
$-\frac{8k\left(\left(n^3+2n^2-n-4\right)k^3+n\left(n^2-5n-4\right)k^2+\left(n^3-8n^2+5n+4\right)k+n\left(n^2-n+8\right)\right)}{(n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$	$\mathrm{Tr}[A^2B^2]$
$\frac{4k\left(\left(2n^2+3n-4\right)k^3-2n\left(n^2+n-1\right)k^2+\left(-n^3+n^2-5n+4\right)k+n\left(n^2+5n-4\right)\right)}{(n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$	$\mathrm{Tr}[A^2]\mathrm{Tr}[B^2]$
$\frac{8k\left(\left(n^2+n+4\right)k^3+n\left(-n^2+n-8\right)k^2-\left(2n^3-5n^2+5n+4\right)k+n\left(-n^2+5n+4\right)\right)}{(n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$	$\mathrm{Tr}[B]\mathrm{Tr}[A^2B]$

Demo

To get RTNI, go to

`https://github.com/MotohisaFukuda/RTNI`

To get a user-friendly but limited version, called RTNI_light, go to

`https://github.com/MotohisaFukuda/RTNI_light`

To try a web version of RTNI_light, go to

`https://motohisafukuda.pythonanywhere.com`

END